**Espaces vectoriels**

 Ce test donne une série d’exercices sur les espaces vectoriels. L’apprenant devra traiter entièrement un exercice avant de consulter la correction. Ceci lui permettra de juger de ses performances en fonction de ses résultats. Il peut reprendre le test à sa volonté quand il veut (par exemple en période de révision ou après avoir relu son cours).

**Nous insistons sur le fait que ça ne sera d’aucune utilité à l’apprenant s’il consulte directement la correction sans avoir traité l’exercice au préalable.**

Exercice 1 :

On considère les vecteurs $\vec{u}$ (-1,2), $\vec{v}$ (-1,2),$ \vec{w}$ (-1,2).

1. Montrer que le système ($\vec{u}$,$ \vec{v}$) est libre.
2. Déterminer les réels a et b tels que $\vec{w}$=a$\vec{u}$+b$\vec{v}$
3. Que peut on conclure sur la famille de vecteurs ($\vec{u}$,$ \vec{v ,}\vec{w}$) ?

Exercice 2 :

On considère les vecteurs $\vec{u}$ (-1,2,-1), $\vec{v}$(1,0,1) et $\vec{w}$(1,1,0) dans $R^{3}$

1. Montrer que ($\vec{u}$,$ \vec{v ,}\vec{w}$)  est une base de $R^{3}$
2. Soit $\vec{a}$(2,3,1) dans la base ($\vec{i}$,$ \vec{j ,}\vec{k}$). Déterminer ses coordonnées dans la base ($\vec{u}$,$ \vec{v ,}\vec{w}$)

Exercice 3 :

Soit A={ $\vec{u}$(2,3,1) ε $R^{3}$/ 2x-y+z=0}

1. Montrer que A est un sous espace vectoriel de $R^{3}$
2. Déterminer une base de A et en déduire sa dimension.

**Réponses**

Réponse 1 :

1. Il suffit de trouver deux réels c et d tels que c$\vec{u}$+d$\vec{v}$ =$\vec{0}$, ceci revient à résoudre un système d’équations, on trouve c=d=0
2. a=2 et b=1
3. ($\vec{u}$,$ \vec{v ,}\vec{w}$)  est un système libre et générateur

Réponse 2 :

1. on doit montrer que c’est un système libre et générateur. On trouve 3 réels c,d,e tels que c=d=e=0 alors le système est libre. Pour montrer que c’est un système générateur, on montrer que tout vecteur de $R^{3}$ peut s’écrire comme combinaison linéaire des vecteurs mentionnés.
2. $\vec{a}$=2$\vec{i}$+3$\vec{j}$+$\vec{k}$= $\vec{u}\left(-1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+\vec{v}\left(-1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\vec{w}(2-1)$= $\vec{u}+2 \vec{v}+\vec{w}$ d’où $\vec{a}$(1 ;2 ;1) dans la base ($\vec{u}$,$ \vec{v ,}\vec{w}$).

Réponse 3 :

1. Le vecteur nul appartient à A donc A est non vide. On montre aussi que toute combinaison linéaire de vecteurs appartenant à A appartient également à A.
2. Une base de A est ($\vec{e},\vec{f})$ avec $\vec{e}$(1 ;0 ;-2) et $\vec{f}$(0 ;1 ;1) ; dim A=2