Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E vérifiant fof=f.

1. Montrer que Kerf Ი Imf = {}
2. Soit un vecteur de E ;
3. Montrer que le vecteur = - f() appartient à Kerf
4. En déduire que appartient à (Kerf + Imf)
5. Justifier alors que E= Kerf + Imf

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, (,,) une base de E et f l’endomorphisme de E tel que f()=, f()=f()=.

1. Ecrire la matrice de f dans la base (,,)
2. Donner l’expression analytique de f
3. Déterminer Kerf et Imf puis donner une base pour chacun de ces sous espaces vectoriels.
4. Montrer que tout vecteur de E peut s’écrire de façon unique comme somme d’un vecteur de Kerf et d’un vecteur de Imf.
5. Montrer que fof=f.

Exercice 3 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, (,) une base de E et f l’endomorphisme de E dont la matrice dans la base (,) est

M=]

1. Justifier que f est un automorphisme.
2. Soit k un nombre réel. On pose J={ ε E / f()= k }
3. Montrer que J est un sous espace vectoriel de E.
4. Démontrer qu’il existe 2 valeurs de k tels que J contienne au moins un vecteur non nul.

**Correction**

Exercice 1 :

1. Il suffit de supposer l’existence d’un vecteur appartenant à la fois à Kerf et à Imf. De part leurs définitions, on trouvera le vecteur nul.
2. a) il suffit de calculer l’image du vecteur qui donnera le vecteur nul.

b) Comme est la somme d’un vecteur de Kerf et d’un vecteur de Imf, alors ε ( Kerf + Imf)

c) Soit un vecteur de E. ε ( Kerf + Imf) or ( Kerf + Imf) est inclus dans E

Exercice 2 :

1. La matrice de f

M= [ ]

1. Expression analytique

{

1. Kerf est la droite d’équation {

Imf est le plan d’équation y-z=0

Une base de Kerf est le vecteur de coordonnées (0 ;-1 ;1)

Une base de Imf est le couple des vecteurs de coordonnés (1,0,0) et (0,1,1).

Exercice 3 :

1. Det M # 0 alors f est bijective. Comme f est un endomorphisme et est bijective alors f est un automorphisme.
2. a) Il suffit de montrer que J est non vide et que toute combinaison linéaire des vecteurs de J appartient toujours à J.

b) k=1 et k=4