Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E vérifiant fof=f.

1. Montrer que Kerf Ი Imf = {$\vec{0}$}
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E ;
3. Montrer que le vecteur $\vec{v}$ = $\vec{u}$- f($\vec{u}$) appartient à Kerf
4. En déduire que $\vec{u}$ appartient à (Kerf + Imf)
5. Justifier alors que E= Kerf + Imf

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, ($\vec{i}$,$ \vec{j}$,$ \vec{k}$) une base de E et f l’endomorphisme de E tel que f($\vec{i}$)=$ \vec{i}$, f($\vec{j}$)=f($\vec{k}$)=$\frac{\vec{j}+\vec{k}}{2}$.

1. Ecrire la matrice de f dans la base ($\vec{i}$,$ \vec{j}$,$ \vec{k}$)
2. Donner l’expression analytique de f
3. Déterminer Kerf et Imf puis donner une base pour chacun de ces sous espaces vectoriels.
4. Montrer que tout vecteur de E peut s’écrire de façon unique comme somme d’un vecteur de Kerf et d’un vecteur de Imf.
5. Montrer que fof=f.

Exercice 3 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, ($\vec{i}$,$ \vec{j}$) une base de E et f l’endomorphisme de E dont la matrice dans la base ($\vec{i}$,$ \vec{j}$) est

M=$[\begin{matrix}2&-2\\-1&3\end{matrix}$]

1. Justifier que f est un automorphisme.
2. Soit k un nombre réel. On pose J={$\vec{u}$ ε E / f($\vec{u}$)= k $\vec{u}$}
3. Montrer que J est un sous espace vectoriel de E.
4. Démontrer qu’il existe 2 valeurs de k tels que J contienne au moins un vecteur non nul.

**Correction**

Exercice 1 :

1. Il suffit de supposer l’existence d’un vecteur appartenant à la fois à Kerf et à Imf. De part leurs définitions, on trouvera le vecteur nul.
2. a) il suffit de calculer l’image du vecteur qui donnera le vecteur nul.

b) Comme $\vec{u}$ est la somme d’un vecteur de Kerf et d’un vecteur de Imf, alors$\vec{ u}$ ε ( Kerf + Imf)

c) Soit $\vec{ u}$ un vecteur de E. $\vec{ u}$ ε ( Kerf + Imf) or ( Kerf + Imf) est inclus dans E

Exercice 2 :

1. La matrice de f

M= [ $\begin{matrix}1&0&0\\0&1/2&1/2\\0&1/2&1/2\end{matrix}$]

1. Expression analytique

{$\begin{matrix}x^{'}=x\\y^{'}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\\z^{'}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{matrix}$

1. Kerf est la droite d’équation {$\begin{matrix}x=0\\y+z=0\end{matrix}$

Imf est le plan d’équation y-z=0

Une base de Kerf est le vecteur de coordonnées (0 ;-1 ;1)

Une base de Imf est le couple des vecteurs de coordonnés (1,0,0) et (0,1,1).

Exercice 3 :

1. Det M # 0 alors f est bijective. Comme f est un endomorphisme et est bijective alors f est un automorphisme.
2. a) Il suffit de montrer que J est non vide et que toute combinaison linéaire des vecteurs de J appartient toujours à J.

b) k=1 et k=4